TD N°3 : Bibliothèques numpy et matplotlib

Ahmed Ammar (ahmed.ammar@fst.utm.tn)

Institut Préparatoire aux Études Scientifiques et Techniques, Université de Carthage.

Feb 11, 2020

Contents

Exercise 1: Tracer une fonction

Ecrivez un programme qui trace la fonction $g(y) = e^{-y}sin(4y)$ pour $y \in [0, 4]$ en utilisant une ligne continue rouge. Utilisez 500 intervalles pour évaluer les points dans [0,4]. Stockez toutes les coordonnées et les valeurs dans des tableaux. Placez le texte des graduations sur les axes et utilisez le titre "Onde sinusoïdale atténuée".

Solution. La programme qui trace la fonction $g(y)$ est:

```
# Importation
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def g(y):
    return np.exp(-y)*np.sin(4*y)

y = np.linspace(0, 4, 501)
# définir un nouveau graphique
plt.figure()
# tracer la fonction g(y) avec ligne solide rouge
plt.plot(y, g(y), 'r-')
plt.xlabel('y'); plt.ylabel('g(y)')
plt.title(u'Onde sinusoïdale atténuée')
 # sauvgarder le grahique (format PNG et PDF)
plt.savefig("fig_ex1.png"); plt.savefig("fig_ex1.pdf")
# Afficher le graphique
plt.show()
```

Exercise 2: Tracer deux fonctions

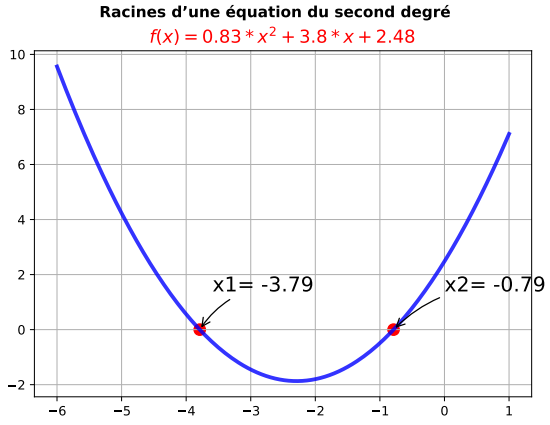
Comme Exercice 1, mais ajouter une courbe en pointillé noir pour la fonction $h(y) = e^{-\frac{3}{2}y} sin(4y)$. Inclure une légende pour chaque courbe (avec les noms g et h).

Solution. La programme qui trace la fonction $g(y)$ avec une nouvelle fonction $h(y)$ est:

```
# Importation
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def g(y):
    return np.exp(-y)*np.sin(4*y)

def h(y):
    return np.exp(-(3./2)*y)*np.sin(4*y)

y = np.linspace(0, 4, 501)
plt.figure()
plt.plot(y, g(y), 'r-', y, h(y), 'k--')
plt.xlabel('y'); plt.ylabel('g(y)')
plt.title(u'Onde sinusoïdale atténuée')
plt.legend(['g', 'h'])

plt.savefig("fig_ex2.png"); plt.savefig("fig_ex2.pdf")
plt.show()
```

Exercise 3: Racines d'une équation du second degré

Dans l'"application de l'exercice 4 dans TD N°2, nous avons montré la représentation graphique d'une équation du second degré $f(x) = 0.83x^2 + 3.8x + 2.48$ ainsi que ses racines réelles:



Reproduire ce graphique en utilisant la fonction `EqSecondDegree(a,b,c)` du script Python `racines.py` pour déterminer les valeurs des racines x1 et x2 de l'équation $f(x)$.

Solution. Le programme qui reproduit la figure en utilisant la fonction `EqSecondDegree()`:

```
# Importation
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from racines import EqSecondDegree
# NOTE: le module racines est le fichier racines.py
# qu'on doit placer dans le répertoire de travail.

def f(x):
    return 0.83 * x**2 + 3.8 * x + 2.48
x = np.linspace(-6, 1, 200)
y = f(x)
x1, x2 = EqSecondDegree(0.83, 3.8, 2.48)

plt.figure(figsize=(7, 5), dpi=80)
plt.plot(x, y, color="blue", linewidth=3, linestyle="-", alpha=.8)
plt.scatter([x1,x2], [f(x1), f(x2)], 80, color='red')

plt.annotate('x1= {:.2f}'.format(x1),
             xy=(x1, f(x1)), xycoords='data',
             xytext=(+10, +30), textcoords='offset points', fontsize=16,
             arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3,rad=.2"))
plt.annotate('x2= {:.2f}'.format(x2),
             xy=(x2, f(x2)), xycoords='data',
             xytext=(+40, +30), textcoords='offset points', fontsize=16,
             arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3,rad=.2"))

plt.suptitle("Racines d'une équation du second degré", fontweight= 'bold')
plt.title(r"$f(x) = 0.83 * x^2 + 3.8 * x + 2.48$",fontsize=14, color = 'b')

plt.grid()
plt.show()
```

Exercise 4: Approximer une fonction par une somme de sinus

Nous considérons la fonction constante par morceaux:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T/2, \\ 0, & t = T/2, \\ -1, & T/2 < t \leq T \end{cases} \tag{1}$$

On peut approcher f(t) par la somme:

$$S(t;n) = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} \sin\left(\frac{2(2i-1)\pi t}{T}\right) \tag{2}$$

On peut montrer que $S(t;n) \to f(t)$ quand $n \to \infty$

a) Ecrivez une fonction Python `S(t, n, T)` pour renvoyer la valeur de $S(t; n)$.

Solution. La fonction Python `S(t, n, T)` est la suivante:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def S(t, n, T):
    s = 0
    for i in range(1, n+1):
        A = 1/(2*i - 1)
        B = 2*(2*i - 1)* (pi * t)
        s +=  A * np.sin(B/T)

    return s*4/np.pi
```

b) Ecrivez une fonction Python `f(t, T)` pour calculer $f(t)$.

Solution. La fonction Python `f(t, T)` est la suivante:

```
def f(t, T):
    if 0 < t < T/2:
        return 1
    elif t == T/2:
        return 0
    elif T/2 < t <= T:
        return -1
```

c) Créer un tableau `t` à l'aide de la fonction `linspace`, du module `numpy`, pour `100` valeurs `t` uniformément espacés dans [0, T]. On prendra $T = 2\pi$.

Solution. Le tableau de valeurs de t pour $T = 2\pi$ est défini comme suit:

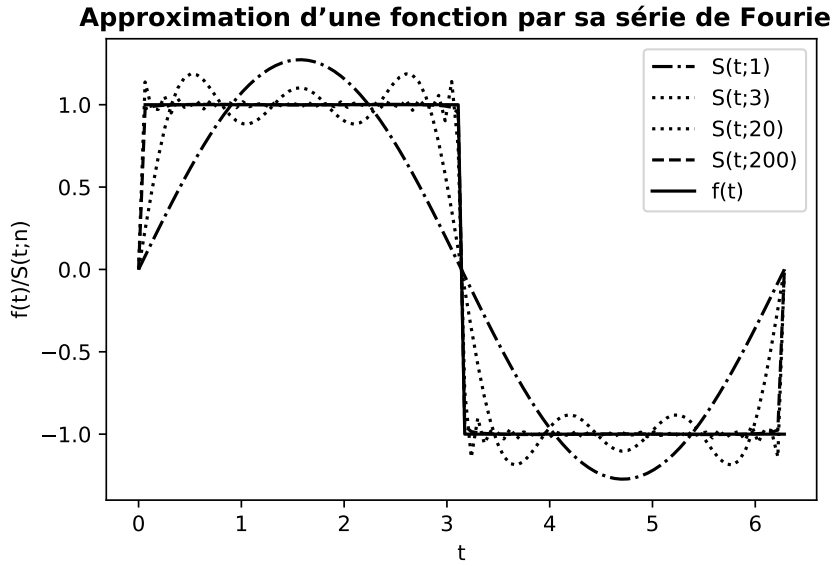
```
T = 2*np.pi
t = np.linspace(0, T, 100)
```

d) Remplir une liste `F` par les valeurs de `f(ti,T)` avec $ti \in t$. Transformer la liste `F` en un tableau (nous voulons avoir un tableau pour la fonction $f(t)$ avec $t \in [0, T]$ et $T = 2\pi$).

Solution. Le code suivant nous permet d'avoir un tableau de $f(t)$:

```
F = []
for ti in t:
  F.append(f(ti,T))
F = np.array(F)
```

e) Tracer $S(t;1)$, $S(t;3)$, $S(t;20)$, $S(t;200)$ et la fonction exacte $f(t)$ dans le même graphique. Le résultat devrait être similaire au graphique ci-dessous.



Solution. Le programme qui donne le graphique est:

```
plt.plot(t, S(t, n=1, T=2*pi), 'k-.', label = "S(t;1)")
plt.plot(t, S(t, n=3, T=2*pi), 'k:', label = "S(t;3)")
plt.plot(t, S(t, n=20, T=2*pi), 'k:', label = "S(t;20)")
plt.plot(t, S(t, n=200, T=2*pi), 'k--', label = "S(t;200)")
plt.plot(t, F, 'k-', label = "f(t)")
plt.title(u"Approximation d'une fonction par sa série de Fourier", fontweight='bold')
plt.ylabel("f(t)/S(t;n)")
plt.xlabel("t")
plt.legend()
```

f) Quelle est la relation entre la qualité de l'approximation et le choix de la valeur de `n`?

Solution. La qualité de l'approximation dépend de n. $S(t;n) \to f(t)$ quand $n \to \infty$.

Exercise 5: Fonctions spéciales (intégrales de Fresnel et spirale de Cornu)

Les intégrales de Fresnel ont été introduites par le physicien français Augustin Fresnel (1788-1827) lors de ses travaux sur les interférences lumineuses (voici un article intéressant à lire: Fresnel, des Mathématiques en Lumière).

Ces intégrales doivent être calculées numériquement à partir des développements en série des intégrales:

$$\int_0^x e^{-i\frac{\pi t^2}{2}} dt = \int_0^x cos(t^2)dt - i\int_0^x sin(t^2)dt = C(x) - iS(x)$$

Les fonctions de Fresnel sont des fonctions spéciales, définies par:

Pour $x \geq \sqrt{\frac{8}{\pi}}$

$$C(x) = \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) gg1 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) ff1$$
$$S(x) = \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) ff1 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) gg1$$

et pour $0 \leq x < \sqrt{\frac{8}{\pi}}$

$$C(x) = \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) gg2 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) ff2$$
$$S(x) = -\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) ff2 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) gg2$$

Où:

$$ff1 = \sum_{n=0}^{11} \frac{d_n}{x^{2n+1}} \left(\frac{8}{\pi}\right)^{n+1/2} \quad gg1 = \sum_{n=0}^{11} \frac{c_n}{x^{2n+1}} \left(\frac{8}{\pi}\right)^{n+1/2}$$
$$ff2 = \sum_{n=0}^{11} b_n x^{2n+1} \left(\frac{\pi}{8}\right)^{n+1/2} \quad gg2 = \sum_{n=0}^{11} a_n x^{2n+1} \left(\frac{\pi}{8}\right)^{n+1/2}$$

et a_n, b_n, c_n et d_n sont des coefficients tabulés (*J.Boersma Math Computation 14,380(1960)*) et donnés dans un fichier **coef.dat**:

```
#-----------------------------------------------
#    an            bn          cn           dn
#-----------------------------------------------
+1.595769140 -0.000000033 -0.000000000 +0.199471140
-0.000001702 +4.255387524 -0.024933975 +0.000000023
-6.808568854 -0.000092810 +0.000003936 -0.009351341
-0.000576361 -7.780020400 +0.005770956 +0.000023006
+6.920691902 -0.009520895 +0.000689892 +0.004851466
-0.016898657 +5.075161298 -0.009497136 +0.001903218
-3.050485660 -0.138341947 +0.011948809 -0.017122914
-0.075752419 -1.363729124 -0.006748873 +0.029064067
+0.850663781 -0.403349276 +0.000246420 -0.027928955
```

```
-0.025639041 +0.702222016 +0.002102967 +0.016497308
-0.150230960 -0.216195929 -0.001217930 -0.005598515
+0.034404779 +0.019547031 +0.000233939 +0.000838386
```

Écrire un programme Python qui calcule les fonctions de Fresnel $C(x)$ et $S(x)$ ainsi que leurs représentations graphiques:

a) Définir les fonctions `ff1(x)`, `gg1(x)`, `ff2(x)` et `gg2(x)`. Chaque fonction renvoie la valeur de la somme qui lui correspond.

Solution. Les fonctions `ff1(x)`, `gg1(x)`, `ff2(x)` et `gg2(x)` sont les suivantes:

```
# Importation
import numpy as np

def ff1(x):
    S = 0
    for i in range(12):
        fn = (8 / np.pi)**(i + 0.5) * dn[i]
        S += fn * x**(-2 * i - 1)
    return S

def gg1(x):
    S = 0
    for i in range(12):
        gn = (8 / np.pi)**(i + 0.5) * cn[i]
        S += gn * x**(-2 * i - 1)
    return S

def ff2(x):
    S = 0
    for i in range(12):
        fn = (np.pi / 8)**(i + 0.5) * bn[i]
        S += fn * x**(2 * i + 1)
    return S

def gg2(x):

    S = 0
    for i in range(12):
        gn = (np.pi/8)**(i + 0.5) * an[i]
        S +=  gn * x**(2 * i + 1)
    return S
```

b) Définir les fonctions Python `C(x)` et `S(x)` qui renvoient respectivement les listes, les valeurs de $C(x)$ et $S(x)$, `CF` et‘ SF‘ (en utilisant une boucle `for` pour remplir les listes par exemple).

Solution. Les fonctions Python `C(x)` et `S(x)` sont les suivantes:

```
def C(x):
    CF=[]
    for i in range(len(x)):
        if x[i] >= np.sqrt(8/np.pi):
```

```
            cf=0.5 + np.cos((np.pi*x[i]**2)/2)*gg1(x[i]) + np.sin((np.pi*x[i]**2)/2)*ff1(x[i])
            CF.append(cf)
        elif 0 <= x[i] < np.sqrt(8/np.pi):
            cf = np.cos((np.pi*x[i]**2)/2)*gg2(x[i]) + np.sin((np.pi*x[i]**2)/2)*ff2(x[i])
            CF.append(cf)
    return CF
def S(x):
    SF=[]
    for i in range(len(x)):
        if x[i] >= np.sqrt(8/np.pi):
            sf = 0.5 - np.cos((np.pi*x[i]**2)/2)*ff1(x[i]) + np.sin((np.pi*x[i]**2)/2)*gg1(x[i])
            SF.append(sf)
        elif 0 <= x[i] < sqrt(8/np.pi):
            sf = -np.cos((np.pi*x[i]**2)/2)*ff2(x[i]) + np.sin((np.pi*x[i]**2)/2)*gg2(x[i])
            SF.append(sf)
    return SF
```

c) Créer des tableaux `an`, `bn`, `cn` et `dn` à partir du fichier **coef.dat**.

Solution. Les tableaux `an`, `bn`, `cn` et `dn` sont chargés à partir du fichier **coef.dat** à l'aide del a fonction `numpy.loadtxt()`:

```
an, bn, cn, dn = np.loadtxt('coef.dat', comments='#', usecols=(0, 1, 2, 3), unpack=True)
```

d) Créer un tableau `x`. Utilisez 800 intervalles pour évaluer les points dans [0,10] (cas où $x \geq 0$).

Solution. Le tableau `x` s'écrit:

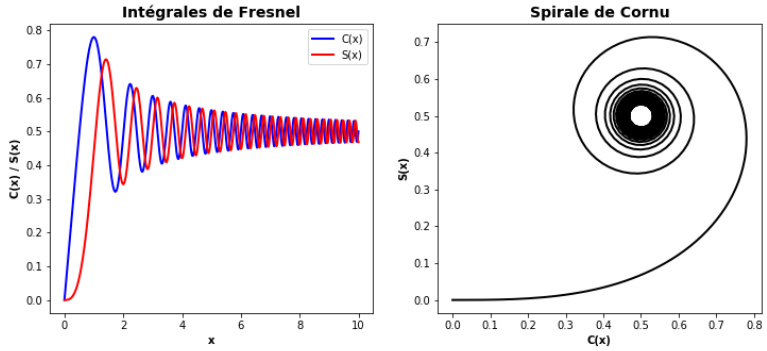
```
x = np.linspace(0,10, 500)
```

e) Transformer `C(x)` et `S(x)` en tableaux `numpy`, respectivement `CF` et `SF`.

Solution. Les listes `C(x)` et `S(x)` sont transformés en tableaux `numpy` à l'aide de la fonction `numpy.array()`:

```
CF = np.array(C(x)); SF = np.array(S(x))
```

f) Tracer une grille de figures à 2 colonnes (voir Cours3: Vues en grille) dont le graphique de gauche représente `CF` et `SF` en fonction de `x` et le graphique de droite représente une clothoïde (ou spirale de Cornu, ou Spirale de Fresnel..)'SF' en fonction de `CF`. La sortie de ce programme devrait être comme suit:



Solution. La représentation graphique des intégrales de Fresnel et du spirale de Cornu est donc:

```
plt.figure(figsize=(12,5))
subplot(1,2,1)
plt.plot(x, CF,'b', x, SF,'r', linewidth=2)
plt.xlabel("x", fontweight='bold'); plt.ylabel("C(x) / S(x)", fontweight='bold')
plt.title(u"Intégrales de Fresnel", fontsize=14, fontweight='bold')
plt.legend(["C(x)","S(x)"])
subplot(1,2,2)
plt.plot(CF, SF, linewidth = 2, color = 'k')
plt.xlabel("C(x)", fontweight='bold'); plt.ylabel("S(x)", fontweight='bold')
plt.title("Spirale de Cornu", fontsize=14, fontweight='bold')

plt.savefig("fresnel.png")
plt.show()
```